

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle \mathcal{C} de centre $J(2, 3, 0)$ dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $Q \cap S$.

3) On donne les points $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 2(x+y-z+1)$.

4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

$$ax+by+cz+d=0 \quad \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur normale}$$

$$P: x+y-z-5=0 \quad \vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q: x+y-z+7=0 \quad \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_P = \vec{n}_Q \Rightarrow P \text{ et } Q \text{ sont strictement parallèles}$$

$$\mathcal{C}(1, 2, 1)$$

$$S(x, y, z) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$$

S sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

$$y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$$

$$z^2 - 2z = (z-1)^2 - 1$$



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle \mathcal{C} de centre $J(2, 3, 0)$ dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $Q \cap S$.

- 3) On donne les points $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 2(x+y-z+1)$.

- 4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle \mathcal{C} de centre $J(2, 3, 0)$ dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $Q \cap S$.

- 3) On donne les points $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 2(x+y-z+1)$.

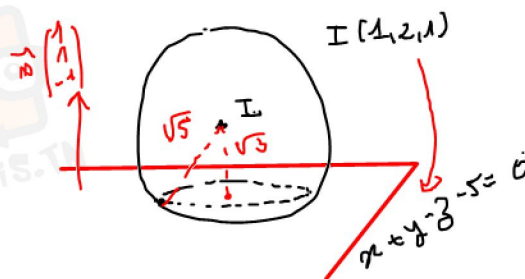
- 4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 - 1 - 4 - 1 + 1 = 0$$

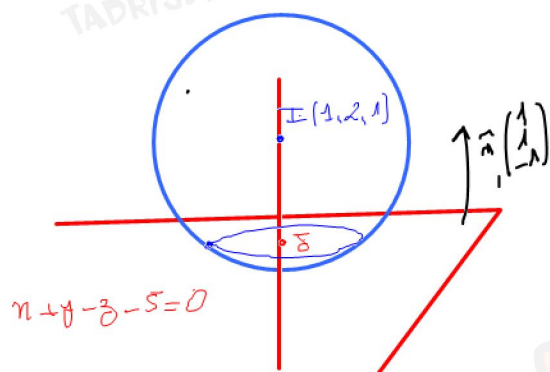
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$$

Sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et
Le rayon $\sqrt{5}$



$$d(I, P) = \frac{|1+2-1-5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{3} < \sqrt{5}$$

$S \cap P$ est un cercle de rayon
 $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{2}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\alpha) + (2+\alpha) + (1-\alpha) - 5 = 0 \\ x = 1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow J(2, 3, 0)$ centre de \mathcal{C}

\mathcal{C} le centre de \mathcal{C} ($\mathcal{C}(x, y, z)$)

\mathcal{C} est la droite passant par I
et perpendiculaire à P
 $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$

$$\begin{cases} x+y-z-5=0 \\ x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

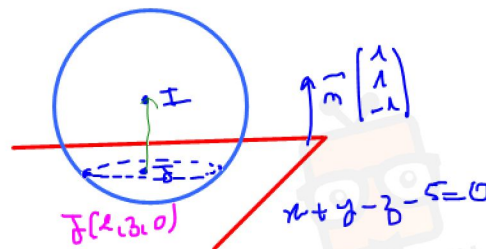
- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$.

- a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.
 b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle \mathcal{C} de centre $J(2, 3, 0)$ dont on déterminera le rayon.
 c) Déterminer $Q \cap S$.

- 3) On donne les points $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.

- a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
 b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 2(x+y-z+1)$.

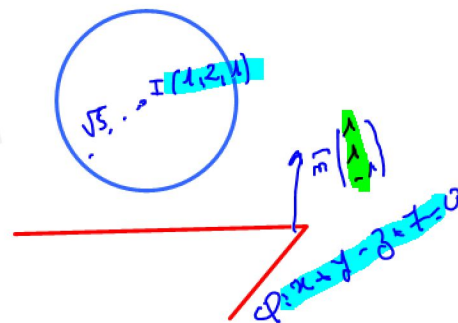
- 4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.



$$2+3-0-5=0 \Rightarrow J \in P$$

$$\vec{IJ} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ vecteur normal de } P$$

J le projeté orthogonal de I sur P
 $\Rightarrow J(2, 3, 0)$ centre de \mathcal{C}



$$d(I, Q) = \frac{|1+2-1+7|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} > \sqrt{5}$$

$$Q \cap S = \emptyset$$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$.

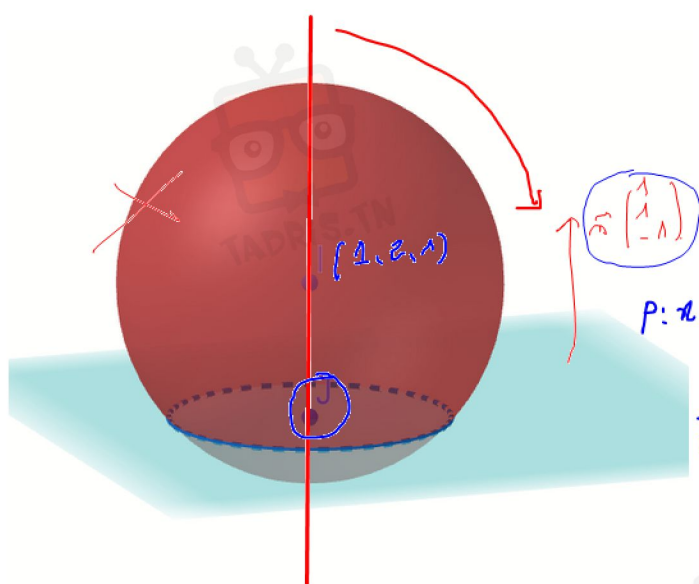
- a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.
 b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle \mathcal{C} de centre $J(2, 3, 0)$ dont on déterminera le rayon.
 c) Déterminer $Q \cap S$.

- 3) On donne les points $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.

- a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
 b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 2(x+y-z+1)$.

- 4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.





$$D: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$P: x + y - z - 5 = 0$$

$$\sigma(\pi, \pi) \\ D = P \cap P \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y - z - 5 = 0 \\ x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \leftarrow \text{systeme}$$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x + y - z - 5 = 0$ et $x + y - z + 7 = 0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$.

a) Justifier que S est la sphère de centre I(1, 2, 1) et de rayon $R = \sqrt{5}$.

b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle \mathcal{C} de centre J(2, 3, 0) dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $Q \cap S$.

3) On donne les points A(0, 0, 1), B(0, 1, 2) et C(2, 2, 5).

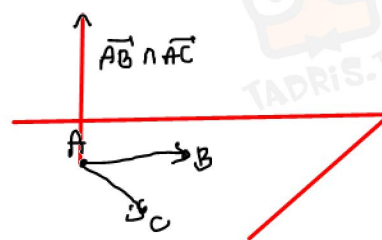
a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 2(x + y - z + 1)$.

4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

$$3) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}$$

\vec{u}, \vec{v} deux vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

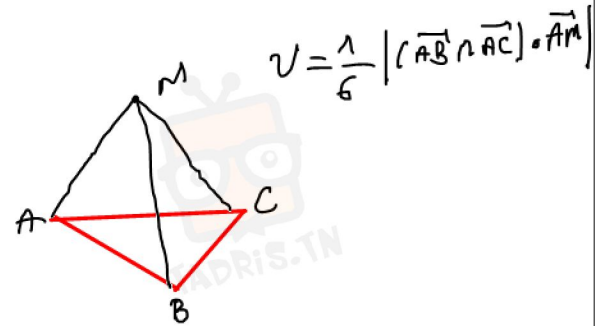
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad (B \cap P)$$



b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 2(x+y-z+1)$.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} &= 2x + 2y - 2(z-1) \\ &= 2x + 2y - 2z + 2 \\ &= 2(x+y-z+1) \end{aligned}$$



4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels $ABCM$ est un tétraèdre de volume égal à 2.

$$V = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM}| = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} |2(x+y-z+1)| = 2$$

$$\Leftrightarrow |x+y-z+1| = 6$$

$$M \in P$$

$$x+y-z+1 = 6 \quad \text{ou} \quad x+y-z+1 = -6$$

$$\begin{array}{l|l} x+y-z-5=0 & x+y-z+7=0 \\ M \in P & M \in Q \end{array}$$

$$P \cap S = \emptyset$$

$$S \cap Q = \emptyset$$

d'où l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels $ABCM$ est un tétraèdre de volume égal à 2 est le vide.



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(2, -1, 1), B(1, -2, -1), C(-1, 1, 3), D(0, 1, -1).$$

1. Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$, puis déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

2. (a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

(b) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V = \frac{11}{3}$

$$2) a) \quad \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 2 \times (-2) + 8 \times 2 + (-5) \times (-2) = 22 \neq 0$$

A, B, C et D ne sont pas coplanaires

$$b) \quad V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} |22| = \frac{11}{3}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ non colinéaires}$$

$\Rightarrow A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}$

